6. Mutassa meg, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldása a valós számok körében!

a) $5\sin x + 2\cos x = 7$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 3$

c) $\sin x \cdot \cos x = \sin 40°$

d) $\sin x \cdot \sin(x + \pi) = \frac{1}{3}$

e) $\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

Megoldás:

a) $\sin x \le 1$ és $\cos x \le 1$, ezért $5\sin x + 2\cos x \le 7$. Az egyenlőtlenségben akkor lesz egyenlőség, ha $\sin x = 1$ és $\cos x = 1$ mindegyike teljesül ugyanarra az x számra, ami nem lehetséges.

b) $\sin \alpha \le 1$, ezért $\sin x + \sin 2x + \sin 3x \le 3$. Egyenlőség csak úgy lehet, ha x megoldása a $\sin x = 1$, $\sin 2x = 1$ és $\sin 3x = 1$ egyenleteknek. Az egyenletek megoldásai rendre $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{4} + m \cdot \pi$, $\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$, ahol a *k, m, n* számok tetszőleges egész számok.
Ennek a három számhalmaznak nincs közös eleme, az egyenleteknek nincs közös megoldása, ezért az eredeti egyenletnek sincs.

c) $2\sin x \cdot \cos x = 2\sin 40°$, azaz $\sin 2x = 2\sin 40° > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, és ez sosem teljesül.

d) $\sin x \cdot \sin(x + \pi) \le 0$, mert $\sin x$ és $\sin(x + \pi)$ ellentétes előjelű, vagy mindkettő nulla.

e) $-1 \le \sin x \le 1$ miatt $\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ csak úgy lehet, ha mindkét tényező 1, vagy ha mindkét tényező -1, ami nem teljesülhet.

7. Oldja meg a $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$ egyenletet!

Megoldás: $\sin 2x = \pm\frac{1}{2}$.

Ha $\sin 2x = \frac{1}{2}$, akkor vagy $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$,

vagy $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

Ha $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, akkor vagy $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{12} + k\pi$,

vagy $2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x_4 = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

8. Oldja meg az alábbi egyenleteket!
a) $\sin x + \cos x = 0$
b) $\sin x + \cos x = 1$
c) $1 + 2\sin 2x = \sin x + \cos x$

a) **I. Megoldás:** $\sin x = -\cos x$. A $\cos x = 0$ megoldásai egyenletünknek nem megoldásai, így oszthatunk $\cos x$-el, nem veszítünk gyököt: $\frac{\sin x}{\cos x} = -1$, $tg\, x = -1$, a megoldás $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

a) **II. Megoldás:** Emeljük négyzetre mindkét oldalt: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$, azaz $1 + 2\sin x \cdot \cos x = 0$, $1 + \sin 2x = 0$, $\sin 2x = -1$, így $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$. Ellenőrzés mutatja, hogy ezek mind megoldások, a négyzetre emeléssel most nem kaptunk hamis gyököt. (Hiszen az $a = 0$ és az $a^2 = 0$ egyenletek ekvivalensek.)

a) **III. Megoldás:** Szorozzuk az egyenletet $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = 0$, azaz $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, így $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in Z$.

b) **I. Megoldás:** Emeljük négyzetre mindkét oldalt, $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1$, azaz $2\sin x \cdot \cos x = 0$. Ha $\sin x = 0$, akkor $x_1 = k\pi,\ k \in Z$; ha $\cos x = 0$, akkor $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$. A négyzetre emelés általában bővíti az egyenlet megoldásainak halmazát, emiatt a kapott megoldásokat ellenőrizni kell, nézzük meg egy perióduson belül a lehetséges gyököket. A gyökök egy része kiesik (a hamis gyökök a $\sin x + \cos x = -1$ megoldásai), a megoldások $x_1^* = 2k\pi,\ k \in Z$ és $x_2^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$.

b) **II. Megoldás:** Szorozzuk az egyenletet $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, azaz $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, így $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_1 = 2k\pi$, illetve $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in Z$.

c) $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2$ miatt egyenletünk átírható $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$ alakba. Az $a^2 = a,\ a(a-1) = 0$ egyenlet gyökei $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$. A $\sin x + \cos x = 0$ egyenlet megoldása az a) feladat szerint: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in Z$. A $\sin x + \cos x = 1$ megoldásai a b) feladat szerint: $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. A gyökök: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sin 4x = \sin x$ b) $\sin 4x = -\sin x$

c) $\cos 4x = \sin x$ d) $\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{ctg} x$

Megoldás:

a) Ha $\sin\alpha = \sin\beta$, akkor $\alpha = \beta + 2k\pi$, vagy $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi$, ahol $k \in Z$.

Ezért $4x = x + 2k\pi$, azaz $x_1 = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$, vagy $4x + x = \pi + 2k\pi$, azaz $x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{5}$, $k \in Z$.

b) A $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ azonossággal az előbbi típusú egyenlethez jutunk: a $\sin 4x = -\sin x$ egyenlet helyett a $\sin 4x = \sin(-x)$ egyenletet vizsgáljuk. Így vagy $4x = -x + 2k\pi$, azaz $x_1 = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in Z$, vagy $4x + (-x) = \pi + 2k\pi$, azaz $x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in Z$.

c) $\cos 4x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, így

vagy $4x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in Z$,

vagy $4x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi$, azaz $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

d) $\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(-x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, így $4x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi$, $x = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k \in Z$.

10. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\cos x = \operatorname{tg} x$ b) $2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 = 0$

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartományába az $x \neq 90° + k \cdot 180°$, $k \in Z$ értékek tartoznak. $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$, innen $\cos^2 x = \sin x$, azaz $1 - \sin^2 x = \sin x$. Rendezzük az egyenletet: $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Ennek a $\sin x$-re másodfokú egyenletnek a gyökei: $(\sin x)_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $(\sin x)_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Az első érték kisebb –1-nél, így annak az egyenletnek nincs megoldása. A második egyenlet gyökei adják egyenletünk megoldásait: $x_1 = 38{,}17° + k \cdot 360°$, $x_2 = 141{,}83° + k \cdot 360°$, ahol k tetszőleges egész szám.